



Problemas, Día 2

Problema 5

Una guerrera, con ayuda de un pueblo, atacará a un dragón durante 2026 días. Cada día se realiza exactamente una de las siguientes acciones:

- **Atacar:** Cada guerrera le hace 1 punto de daño al dragón.
- **Entrenar:** Exactamente una pueblerina entrena y se convierte en guerrera. Ninguna guerrera ataca ese día.

El daño total es la suma del daño hecho a lo largo de los 2026 días. ¿Cuál es la máxima cantidad de puntos de daño total que puede recibir el dragón?

Problema 6

Sea ABC un triángulo y sean X , Y y Z puntos en los rayos BC (con origen B), CA (con origen C) y AB (con origen A), respectivamente, tales que $BC = CX$, $CA = AY$ y $AB = BZ$. Demuestra que las medianas de ABC y las medianas de XYZ se cruzan todas en el mismo punto.

Nota: Un rayo es una línea que comienza en un punto fijo (llamado origen) y se extiende indefinidamente en una sola dirección.

Problema 7

Sean x, y, z números reales positivos tales que $xy + yz + zx = 3$. Demuestra que

$$\frac{x^2 + y^2}{z} + \frac{y^2 + z^2}{x} + \frac{z^2 + x^2}{y} \geq 6$$

Problema 8

Sea n un entero positivo impar. Un *laberinto de espejos* es un tablero de $n \times n$ casillas, con paredes de cristal, donde en cada casilla se coloca un espejo de doble cara en una de las dos diagonales posibles. Dado un laberinto de espejos apuntamos un láser a una de sus paredes exteriores y el láser entra horizontalmente o verticalmente al laberinto. Si el láser choca con un espejo, siempre choca en el punto medio y se refleja 90° según la orientación del espejo. Decimos que el laberinto es *perfecto* si, sin importar a qué pared exterior apuntemos el láser, el láser recorre una cantidad par de casillas antes de salir del laberinto (si el láser visita varias veces la misma casilla se cuenta varias veces esa casilla en el recorrido). Determina de cuántas maneras se pudieron colocar los espejos para formar un laberinto perfecto.

Las dos posibles orientaciones de espejos:



Nota: En este dibujo, cada casilla contiene un espejo con orientación b; la línea punteada es un ejemplo de un recorrido que seguiría el láser en este laberinto

